

意欲を引き出す方程式の指導

-絶対値記号を含む方程式の解法を通して-

現 東京都立雪谷高等学校 主任教諭 山下雅也

(授業時 東京都立足立高等学校定時制課程)

1. はじめに

定時制に入学してきた生徒に対し、担任として一対一の面談を行ったことがある。このときに、「一番嫌いな教科は何？」と質問したところ、9割以上の生徒が「数学」と答えたので、衝撃を受けた。「どんなところが？」と聞いたところ、「分からないから」という回答が多く、数学に対して「面白い」「できて楽しい」という我々の期待に対して、正反対な印象を生徒たちがもっていることを表していた。

公立中学校では子どもの学力幅がかなりある。また、数学は積み重ねが重要な教科であり、他教科に比べてやり直しできる場面は数学ではとても少ない。中学校の数学では数と式・関数・図形とスパイラルに教えて、共有して理解を図る工夫がなされている。しかし、数学が不得意な生徒や理解が不十分な生徒にとっては苦手なものが何度も出てくるように見えてしまう可能性がある。

新学習指導要領 [1]では、「繰り返し指導」の文言が追加され、また、「学習の遅れがちな生徒などについては、例えば義務教育段階の学習内容の確実な定着を図るための指導」を求めている。まさに定時制課程において、このような指導を求めているのだろう。しかしながら、問題の解き方を教えるだけでは、「面白さ」を引き出すことは難しい。定時制生徒に対しては、式の処理の仕方よりも式の意味を教師が掘り起こして意義を伝えることの方が興味・関心の喚起に役立つと考える。

本発表では、全日制の生徒でも苦手となりやすい「絶対値」に関する問題において、定義である「原点からの距離」に立ち戻って考え、絶対値付き方程式を数直線で解く指導を提案・実践する。

2. 絶対値記号を含む式

(1) 絶対値の指導の現状

絶対値は中学校では、1学年で「正負の数」の「数の大小」および「加法」の時に学習指導している [2]。その後、2学年・3学年で、絶対値の指導は一切なく、次に現れるときは高等学校の「数学I」においてである。ここでは絶対値記号を導入し、複雑な式についても解けるよう指導している。しかし、付録的な扱いで掲載してあったり、一切掲載していない教科書もあったりする。

(2) 現在の指導の問題点

- $+8$ の絶対値は 8 、 -6 の絶対値は 6 では、単なる符号を省いた数にしか見えない。中学校1学年の指導当初は数直線を使うが、その後3年間習わないため、数直線の意識が薄らいでしまう。
- 「数学I」では絶対値が「(数直線上での) 原点からの距離」と定義しておきながら、例題では数直線を使うことなく、「場合分け」で解いている [3]。

- 大学の微分積分学での数列の極限の定義では、以下のような絶対値付き不等式を用いており、純粋数学においても数直線上の距離感覚が重要になる [4]。

$n > N$ なるすべての n に対して、 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となるとき、数列 a_n は収束して
 極限值が α であるといい、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と書く。

これらのことから、絶対値の指導では数直線を用いることが本質的な解き方であると考えられる。しかし、複雑になると労力がかかるため、「場合分け」のよさも示すことが必要である。

(3) 研究仮説

今回の解法の指導における研究仮説を以下に記す

- ① 「絶対値記号の中の減法は数直線上の2点間距離」と指導する。具体的には、 $|a - b|$ は b を基準としたときの a までの距離であるとする。そうすれば、 a の絶対値の定義も $|a - 0| = |a|$ から、 $|a|$ は原点から a までの距離ととらえることができるであろう。
- ② $|x - 3| = 4$ のように文字を導入し、方程式の解を求める。この際、機械的な計算の代わりに数直線を利用することで、簡単に求められることを紹介し、方程式の解を求める。問題解決・解答に対する意欲向上を図ることができるであろう。

3. 授業実践

東京都公立高等学校定時制通信制教育研究会 数学部会

兼 東京都高等学校数学教育研究会 研究部 定通分科会 平成 22 年度第 4 回研究協議会
 単元名：「数学 I 2 章 方程式と不等式 [3]」

場所・日時：都立足立高等学校

- ・ 10 月 22 日（金）2 校時（18：35～19：20）「研究授業 1」2 年 B 組
- 3 校時（19：25～20：10）「研究授業 2」2 年 A 組

指導対象：定時制課程 普通科 2 年生

(1) 研究授業 1 「絶対値について」

① 学習内容

- ア 「標高を測る」とき、「海が無かったら、どこから測る？」と質問し、基準を決めて減法を使用することを確認する。
- イ 数直線上の原点(基準)からの距離という発想から、絶対値を紹介する。
- ウ 数直線を利用し、絶対値を求める。 $|+7|$ など。
- エ 「絶対値記号の中の計算は通常にできる」ことを実感させるため、計算演習を行う。 $|(-2) - (-9)|$ など。

② 授業中の生徒の様子

富士山の高さを問う場面では、海が無ければ「空から測る」など、積極的に意見を出す場面があった。また、多くの生徒は計算の仕方が分かっていたように思われる。

③ 研究協議

- 時間が無く、まとめる時間が欲しかった。導入部分に時間をかけすぎた。絶対値記号

に早く進んだ方が生徒の意欲向上維持の面でよかったのではないか。

- 導入の富士山の高さを問う部分は、生徒が意欲的に答えていたので、教材として適していた。基準をスカイツリー、海面、マリアナ海溝^①と変えながら説明したのは流れが分かりやすい。

④ 生徒のアンケート結果

ア 今回の授業は分かりましたか？

よく分かった(31%)、分かった(50%)、いまひとつ(15%)、全然分からない(4%)

イ 授業での計算は出来ましたか？

バッチリ(15%)、まあまあ(62%)、いまひとつ(15%)、方法すら分からない(8%)

ウ 更に説明が欲しい欲しいと思うなら、どの内容についてですか？(複数可)

高さの測り方(42%)、絶対値の意味(42%)、絶対値の書き方(15%)

絶対値の大小(23%)、絶対値の計算方法(23%)

エ 次回までに今回の内容は覚えていられそうですか？(はい50%、いいえ50%)

オ 今回の「絶対値」の授業は興味をもてる内容でしたか？(はい37%、いいえ63%)

カ 次回の授業はこの内容を更に深めたものです。楽しみに思えますか？(はい44%、いいえ56%)

キ 最後に自由にコメントをどうぞ

- 不等号や方程式より幾分分かりやすかった。
- まず(絶対値の)意味が分からなかった。意味が分かりたい。

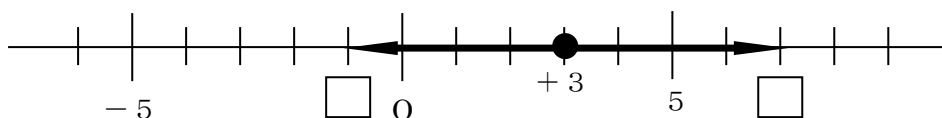
(2) 研究授業2「絶対値記号を含む方程式」

① 学習内容

ア $|-2|$ 、 $|7-3|$ の計算をし、前回の復習をする。

イ $|\square-3|=4$ 、 \square を求めるよう、発問する。

ウ 数直線を使い、 $|\square-3|$ 、 \square を「+3を基準とし、距離が4である」と考える(下図)。



エ $|x+3|=4$ は $|x-(-3)|=4$ と変形し、加法も同様に解けることを確認する。

オ 問題演習(さらに、自分で問題を作成し、隣の生徒に解かせる)

② 授業中の生徒の様子

絶対値だけの計算はできていたが、方程式の x を求める場面では意見があまり出なかった。しかし、説明を理解した生徒は数直線を上手く利用して解けるようになっていた。

③ 研究協議

- $|7-3|=4$ から $|\square-3|=4$ の展開は流れとして分かりやすかったと思う。
- $|x+3|=4$ を $|x-(-3)|$ に変形することは生徒にとって難しいようだった。
- 数直線を利用できた生徒にとっては、 $|x-5|=2$ は考えやすい。

④ 生徒のアンケート結果

ア 今回の授業は分かりましたか？

よく分かった(29%)、分かった(39%)、いまひとつ(26%)、全然分からない(5%)

イ 授業での計算は出来ましたか？

バッチリ(14%)、まあまあ(54%)、いまひとつ(14%)、方法すら分からない(8%)

ウ 更に説明が欲しい欲しいと思うなら、どの内容についてですか？(複数可)

絶対値の計算方法(37%)、2点間の距離の意味(18%)、絶対値の方程式の解き方(47%)

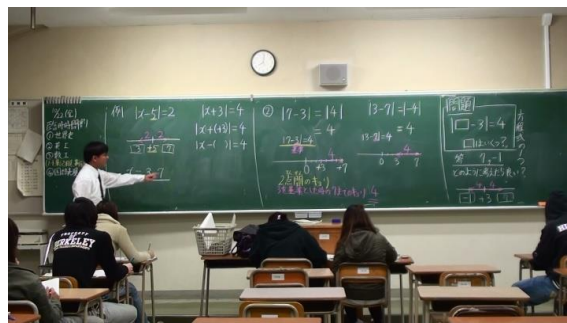
エ あなたにとって面白い内容でしたか？(はい58%、いいえ42%)

オ どのように思いました？

- ・今日は何か出来た。 ・なんか複雑。
- ・もうちょっと問題をやって感覚的に分かりたかった。
- ・絶対値が分かりやすかった。



研究授業1 (絶対値について)



研究授業2 (絶対値記号を含む方程式)

4. 成果と今後の課題

(1) 成果

本発表においては数直線を利用して絶対値の導入、絶対値付き方程式を解く指導の実践を行った。絶対値付き方程式を解くことは全日制生徒にも難しい内容であるが、授業に対してのアンケートで「面白い」が58%と過半数を越すなど、ある程度の生徒に問題解決や解答に対する意欲を沸かせることができた。

(2) 今後の課題

数直線に矢印や距離をテープなどで簡単に示せるような、指導に適した教具の開発の必要がある。また、演習問題の順序の完成度を上げて調査していくことも大切と考える。

引用文献

- 1 文部科学省. 高等学校指導要領. 平成21年. ページ:8.
- 2 澤田、坂井. 数学1: 教育出版.
- 3 飯高、松本. 数学I: 東京出版.
- 4 石井、ほか. 微分積分学: 開成出版、1992.

i 1年次4月に「正負の数」で既習

ii 世界最深部(フィリピン沖、-10,920m)

数学科学習指導案①

東京都立足立高等学校 定時制課程

授業者 山下雅也

1. 日時 10月22日(金) 2校時 18:35～19:20
2. 指導学級・場所 2年B組
3. 単元

- (1) 単元名「2章 方程式と不等式」
- (2) 使用教科書「数学I」(東京書籍) pp.33-56
- (3) 単元観

1章「数と式」の式の展開・因数分解を用いて一元一次不等式および二次方程式について学習する。不等式では数の大小関係についての式を一次方程式のような式の変形で解を求められることを知り、その条件を満たす変域の値の集合であることを理解させる。その際、 x にいろいろな数値を代入して確かめたり、数直線と対比させたりしながら、解の存在する範囲をとらえさせることが大切である。

また、二次方程式では、因数分解・平方根を用いて解くこと十分理解したうえで、解の公式を導き、実数解をもつ二次方程式の解を求めることができるようにする。さらに、判別式を用いることで、二次方程式の実数解の個数を求めることができる有用性も実感させる。

- (4) 単元の指導計画

	学習活動・学習内容	学習活動に即した具体的な評価規準
1	一次方程式(5)	・式の展開、等式の変形、移項による操作により、未知数を方程式を立てて解くことの良さを知る。
2	平方根(6)	・数の平方根について理解し、数の概念についての理解を一層深める。 ・平方根を含む簡単な式の計算ができる。
3	二次方程式(7)	・因数分解を用いて解くことができる。 ・平方根の考え方を用いて、式を解くことができる。 ・解の公式を用いて、式を解くことができる。 ・判別式を用いて、二次方程式の実数解の個数を求めることができる。
4	一次不等式(3)	・不等式が大小関係についての条件を式にしたものであり、この条件を満たす変数の値の集合が不等式の解であることを理解する。 ・不等式を変形して、一次不等式の解を求めることができる。
5	絶対値(本時1/1)	・絶対値は数直線上での原点からの距離であることを理解する。
6	絶対値記号を含む方程式・不等式(2)	・絶対値の特徴から、絶対値記号を含む方程式・不等式の存在を確認し、その解を求めることができる。

4. 生徒の様子

24名。比較的小となしいクラス。内容の理解度が表面的に見えにくい部分があるが、まじめに取り組もうという姿勢を持つ。しかし、基礎学力の習熟度が十分でない。

5. 本時の指導

- (1) 本時の目標

絶対値についての興味を持たせる。さらに、絶対値に関する簡単な計算が出来るようにする。

(2) 本時の評価規準

関心・意欲・態度	見方や考え方	表現・処理	知識・理解
基準から大きさを測ることの有用性に気付き、興味をもつ。さらに、絶対値の計算に取り組もうとする姿勢を持つ。	いくつかの距離データから高さの計測は減法で求めることに気付く(帰納的な考え方)。	絶対値のついた簡単な式を計算することができる。	絶対値が「原点からの距離」であることを知る。

(3) 研究授業の視点

- ・絶対値は「+-の記号を省いた数」ではなく、「原点からの距離」であることを理解し、その有用性を感じさせることができるかを観察する。
- ・絶対値の簡単な計算を演習させることで、難しさを取り除くことができるか。
- ・数直線を用いることで、視覚的に考えることで理解しやすくなることを実感させる。

(4) 本時の展開

	学習内容	指導上の留意点	評価方法など
導入 ⑳	<p>発問</p> <ul style="list-style-type: none"> ・富士山の標高の 3,776m はどこから測ったものですか？ ・もし、地球に海が無かったら、どうやって標高を測りますか？ <p>まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> ・「基準からの距離」を考えることで、求める大きさを計算しやすくなる。 ・距離(高さ)の計測は、減法であることを確認する。 	<p>海面の高さを基準であることに気付かせる。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・生徒から、いろいろアイデアを引き出そうとする。 	<p>発問に対する答え方の様子を観察する。(関心・意欲・態度)</p>
展開 1 ㉑	<p>絶対値を「原点からの距離」と定義する。 例) $+8 \Rightarrow 8$、$-3 \Rightarrow 3$</p> <p>問題</p> <p>(1) 絶対値記号付きの数値はいくつであるか？</p> <p>① $+7$ ② -4 ③ -1 ④ 0</p> <p>(2) 絶対値の大小を不等号で答えよ。</p> <p>① $+4 , +9$ ② $+5 , -8$</p> <p>(3) 次の計算をなさい。</p> <p>$(+7) - (+3)$, $(-2) - (-9)$ など</p>	<p>数直線の図・色テープを利用して、絶対値の量を意識させる。絶対値には符号をつけないよう、気をつけさせる。</p> <p>(1) 絶対値の記号に慣れさせる。</p> <p>(2) 原点から遠い方が、絶対値が大きくなることに注意させる。色テープを使用して、確認する。</p> <p>(3) 絶対値の中から計算するよう、指導する。</p> <p>時間が余れば、$a = \sqrt{a^2}$ について説明する。</p>	<p>数直線への記入の様子を見ることで、絶対値の教え方を確認する。(知識・理解)</p> <p>机間巡視することで、計算が出来ているかを観察する。(表現・処理)</p>
まとめ ㉒	<p>絶対値は、距離を表すと考えるとわかりやすい。</p>	<p>配布プリントに今回の授業の感想を書かせる。</p>	

10月 日()

授業プリント

組 名前 _____

ぜったいち
○絶対値

ふじさん ひょうこう
富士山の標高は何mか？ _____ m …… ()

もんだい
問題

『 _____ 』

「 _____ 」
(_____)

「東京スカイツリー」
(世界第2位の自立型建造物)

_____ m …… ()

_____ m

富士山

東京スカイツリー



例

(1) スカイツリーから見た富士山の高さは？

答 _____ m

(2) _____ から見た富士山の高さは？

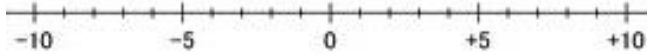
答 _____ m

(3) _____ から見た富士山の高さは？

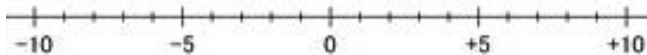
答 _____ m

「絶対値」とは

(例) $+8 \Rightarrow$ _____



(例) $-3 \Rightarrow$ _____



$|-5|$. . . 「 _____ 」 (呼び方)

$|-5| =$ _____ ← ちゅうい注意: _____

計算問題

(1) 次の数はいくつ?

- ① $|+7| =$
- ② $|-4| =$
- ③ $|-1| =$
- ④ $|0| =$

(2) どちらが大きい? (不等号で答えよ)

- ① $|+9|$ $|+4|$
- ② $|+5|$ $|-8|$

(3) 次の計算をしなさい。

- ① $|(+6) - (+3)|$
- ② $|(+12) - (+20)|$
- ③ $|(-2) - (-9)|$