

総会・研究発表会報告

研究発表 (大学入試分科会)

「ポリドロンを用いた多面体の条件整理と実践型授業」

田仲 正弥 (王子総合高)

2010年の大阪大学に以下の様な出題がある。

l, m, n を3以上の整数とする。

等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)l = 2$$

を満たす l, m, n の組をすべて求めよ。

これを解くと、

$$(l, m, n) = (4, 3, 3), (6, 3, 4), (12, 3, 5), (8, 4, 3), (20, 5, 3)$$

となる。これは見方を変えるとオイラーの多面体定理

$$v - e + f = 2$$

を表したものであり、単純に式を丸暗記するだけでは定理のよさは伝わらず、多面体についての考察を紙の上で、そして実際にポリドロンを用いて実践型の授業を行った報告である。

(注: ポリドロンとは、4色11種類の幾何学的なかたちを合わせて、平面的な模様や立体的な造形を作れるシステム玩具のこと。)

これらを用いて実際に手を動かすことにより、視覚的に多面体について学習する。その準備段階として、まずは多面体についての性質を学習する。

・思考1(立体物の「カド」を成形する)

立体物を構成する各面の図形について扱い、凸多面体の構成条件である「カド」について考えさせた。「カド」を作るための条件について整理し、正方形で作ることができる立体、正三角形で作ることができる立体についてまとめを行った。

・思考2(正五角形、正六角形についての考察)

思考1と同様にして、正五角形のみを使ってできる立体、正六角形のみを使ってできる立体について考察させた。ここまでの過程で正多面体は全部で5種類しか存在しない理由を考えさせ、オイラーの多面体定理を紹介した。

・応用(実際に多面体を作る)

凸正多面体は5種類しか存在しないことを伝えた後で、その条件を緩め(1種類の図形だけではなく、2種類以上)、そのときにどの様な多面体が生成されるかを考察させた。なお、今回は正三角形、正方形、正五角形、正六角形の中から2種類を選び、十四面体を作ること为目标にして各班に分け、十四面体ができるか実際に手を動かして考えさせた。以下の手順に沿って考えた後で取り組む生徒もいれば、いきなり試行錯誤して組み合わせる生徒もいたとのことである。

手順

それぞれ a 枚、 b 枚とし、オイラーの多面体定理における v, e, f を表現。1つの頂点に集まる面の数や a, b の値を絞り込んでいく。

最初に、どの2種類の正多角形を採用するか決めよう。

まずは **正四角形** と **正六角形** を用いて作られる立体物について考察!

パターン1 それぞれ a 枚、 b 枚とし、 v, e, f を表現。多面体定理を利用しながら a, b, m を絞り込んでいこう。

パターン2 ポリドロンを利用して試行錯誤しよう。作成に成功したらパターン1に取り組みよう。

計算や記録を残して、他者に伝わりやすいようにまとめよう。

正四角形 a 枚 $m = 3a + 1 + 2e + 3f$
 正六角形 b 枚

$f = 14$
 $a + b = 14$
 $v - e + f = 2$
 $a = 14 - b$
 $-2(14 - b) - 3b = -36$
 $-28 + 2b - 3b = -36$
 $-b = -8$
 $b = 8$
 $a = 6$

$90a + 120b < 360$
 $\therefore m = 4 \times 2 \times 7 = 28$
 $m = 2 \times 27$
 $\frac{4a+6b}{3} - (2a+3b) = -2$
 $4a+6b-6a-9b = -36$
 $-2a-3b = -36$

正四角形 6枚
 正六角形 8枚

定理や公式を丸暗記し、与えられた問題を解くことだけが数学ではない。入口や考え方のみを指導し、そこから先は生徒自身が見つけ、考え、トライ&エラーで実践する様になることが最も理想的な流れかと思う。数学の楽しさを生徒に伝えられる様に我々教員も試行錯誤していかなければならないと感じた。

文責：編集部 大平 剛弘 (都立川高)

問題 1つの面が心や口などのとき、どのような立体が組みあがるだろうか。数学的な思考により立体物の性質を理解しよう。

★思考1★ 立体物の「カド」を成形する 面のもの内角に注目してみると...

①正方形について
 2個集める → 3個集める → 4個集める
 正方形

②正三角形について
 2個集める → 3個集める → 4個集める → 5個集める
 正四面体

③五角形について
 3個集める → 4個集める → 5個集める
 五角形

④六角形について
 3個集める → 4個集める → 5個集める → 6個集める
 六角形

思考1★までのまとめ
 ①カドを作るためにはどうすればいい? 1個(1つ)の内角が 90° のとき、正方形で作ることができる立体は全部で 1 個(1つの内角が 90° だから)。
 ②正方形で作ることができる立体は全部で 1 個(1つの内角が 90° だから)。
 ③正三角形で作ることができる立体は全部で 3 個(1つの内角が 60° だから)。

★思考2★ 思考1と同様のように、正五角形、正六角形についても考える

正五角形について
 正五角形の1つの内角は 108°
 $\times 3$ 個 → 324° (足りない)
 $\times 4$ 個 → 432° (足りない)

正六角形について
 正六角形の1つの内角は 120°
 $\times 3$ 個 → 360° (ぴったり)

問題 正五角形のみを使ってできる立体は全部で何個できる???

1 個

問題 正六角形のみを使ってできる立体は全部で何個できる???

0 個